



Universidade Federal do Rio de Janeiro

Disciplina: Cálculo Avançado I / Análise no $\mathbb{R}^n$

Professor: Lucas Aragão

Semestre: 2026.01

Discente:

Prova 1 - Diferenciação em $\mathbb{R}^n$

1. (a) Considere $F : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = X^3 - 3X$. Calcule a diferencial $DF(X) \cdot H$.

(b) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ e seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \langle Ax, x \rangle$. Mostre que

$$F'(x)h = \langle (A^T + A)x, h \rangle.$$

(c) Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e seja $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(x) = \langle Ax, Bx \rangle$. Determine a segunda derivada de G na forma bilinear $G''(x)(h, k)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais existentes em todo o domínio.

(a) Suponha que existem constantes $M_i > 0$ tais que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq M_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n.$$

Prove que f é contínua.

(b) Suponha agora que $n \geq 2$. Se assumirmos apenas que as derivadas parciais são limitadas em uma vizinhança da origem, f é necessariamente diferenciável na origem? Prove ou construa um contraexemplo.

3. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Suponha que $\nabla f(a) = 0$.

(a) Se a Hessiana $H_f(a)$ for definida positiva, prove que a é um ponto de mínimo local estrito de f .

(b) Se $H_f(a)$ for indefinida, prove que a é um ponto de sela, isto é, prove que toda vizinhança de a contém pontos nos quais f assume valores maiores e menores que $f(a)$.

(c) Se $H_f(a)$ for semidefinida positiva, a é necessariamente ponto de mínimo local? Prove ou apresente um contraexemplo.

4. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica e seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \langle Ax, x \rangle$.

(a) Caracterize os pontos críticos de f restrita à esfera S^{n-1} e seus respectivos valores críticos. Conclua que toda matriz simétrica real possui pelo menos um autovalor real.

(b) Se A for definida positiva, mostre que

$$g(x) = \langle Ax, x \rangle + e^{-\|x\|^2}$$

possui pelo menos um ponto de mínimo global em $\mathbb{R}^n$, mas não possui máximo global.

5. (a) Determine os pontos onde

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

é um difeomorfismo local. A restrição de f a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é globalmente injetora? Mostre que f é uma aplicação aberta em $\mathbb{R}^2$.

(b) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 , com $n > m$. Mostre que φ não pode ser localmente injetora em nenhum ponto onde $D\varphi$ tem posto máximo igual a m .