



Universidade Federal do Rio de Janeiro

Disciplina: Cálculo Avançado I / Análise no $\mathbb{R}^n$

Professor: Lucas Aragão

Semestre: 2026.01

Discente:

Prova 2 – Integração

Instrução importante: Escolha e resolva **exatamente uma questão de cada bloco** (totalizando 5 questões).

Bloco 1

- 1) Considere o espaço $C([0, 1]; \mathbb{R})$ munido da norma uniforme e o funcional $J : C([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $J(f) = \int_0^1 f(x)^2 dx$. Mostre que J é diferenciável e que, para todo $f, h \in C([0, 1]; \mathbb{R})$,

$$DJ(f)h = \int_0^1 2f(x)h(x) dx.$$

- 2) Seja (f_n) uma sequência de funções contínuas em $[0, 1]$ que converge pontualmente para uma função contínua f . Suponha que, para cada $x \in [0, 1]$, a sequência numérica $(f_n(x))$ é monótona. Prove que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em $[0, 1]$.

Bloco 2

- 3) Seja $\mathcal{F} \subset C([0, 1]; \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f \in C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ tais que $f(0) = 0$ e $|f'(x)| \leq 1$ para todo $x \in (0, 1)$. Mostre que o fecho $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto em $C([0, 1]; \mathbb{R})$ munido da norma uniforme.
- 4) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_n(t) = f(nt)$. Se a família $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é equicontínua em $[-1, 1]$, mostre que f é constante em $\mathbb{R}$.

Bloco 3

- 5) Mostre que o subespaço gerado pelas funções $x \mapsto e^{-\lambda x}$ (com $\lambda \geq 0$) é denso em $C([0, 1]; \mathbb{R})$ munido da norma uniforme.
- 6) Mostre que, se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $\int_0^1 f(x)x^{2n} dx = 0$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, então f é identicamente nula em $[0, 1]$.

Bloco 4

- 7) Prove que, se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então K tem medida nula se, e somente se, K tem conteúdo nulo.
- 8) Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas e integráveis em um conjunto limitado A . Suponha que $\int_A |f - g| = 0$. Prove que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, exceto possivelmente em um conjunto de medida nula.

Bloco 5

- 9) Seja $Q = [0, 1]^n$. Calcule:

$$\int_Q \max\{x_1, \dots, x_n\} dx.$$

- 10) Utilize o Teorema de Gauss para mostrar que

$$n|B_r(0)| = r|S_r^{n-1}|,$$

onde $B_r(0)$ é a bola de centro 0 e raio r , e $S_r^{n-1} = \partial B_r(0)$.