

	Universidade Federal do Rio de Janeiro
	Disciplina: Cálculo Avançado I / Análise no $\mathbb{R}^n$
	Professor: Lucas Aragão
	Semestre: 2026.01
	Discente:

Teste 1 - Topologia e Continuidade

- Sejam $(V, \|\cdot\|_a)$ e $(V, \|\cdot\|_b)$ espaços vetoriais normados. Prove que se existe uma constante $C > 0$ tal que $\|x\|_a \leq C\|x\|_b$ para todo $x \in V$, então todo conjunto aberto em relação à norma $\|\cdot\|_a$ é também um conjunto aberto em relação à norma $\|\cdot\|_b$.
 - Considere o espaço das funções contínuas $C([0, 1], \mathbb{R})$. Mostre que a sequência de funções $f_n(x) = x^n$ converge para a função nula na norma $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Prove que $f_n(x)$ não converge na norma do supremo $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.
- Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio. Defina a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \text{dist}(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$.
 - Prove que $|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.
 - Prove que se A é compacto e B é fechado, com $A \cap B = \emptyset$, então existe $\delta > 0$ tal que $\text{dist}(A, B) \geq \delta$.
- Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto não vazio e $g : K \rightarrow K$ uma função tal que $\|g(x) - g(y)\| < \|x - y\|$ para todos $x, y \in K$ com $x \neq y$. Prove que g admite um único ponto fixo. (Dica: Considere a função $h(x) = \|x - g(x)\|$).
- Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto conexo e $A \subset B \subset \overline{A}$, então B também é conexo.
 - Considere em $\mathbb{R}^2$ os conjuntos $H = [0, 1] \times \{0\}$ (o eixo horizontal) e, para cada $n \in \mathbb{N}$, os segmentos verticais $S_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$. Defina o subconjunto P_0 e o “Pente do Topólogo” P como:

$$P_0 = H \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \right) \quad \text{e} \quad P = P_0 \cup (\{0\} \times [0, 1])$$

Mostre que P_0 é conexo por caminhos. Use o item (a) para concluir que P é conexo.

- Prove que, se $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, então existem constantes $a, b > 0$ tais que

$$|f(x)| \leq a\|x\| + b \text{ para todo } x \in V.$$

- Utilize o item anterior para mostrar que a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \langle x, x \rangle$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$.