

	Universidade Federal do Rio de Janeiro	
	Disciplina: Cálculo 2	
	Professor: Lucas Aragão	
	Semestre: 2026.01	
	Discente:	Matrícula:
	Curso:	

Prova 1 - Funções de várias variáveis

- 1) [1,0 pt] Estude a existência do limite ou calcule-o, caso exista: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{2x^5 + y^5}$.
- 2) a) [1,5 pt] Encontre a equação do plano tangente ao gráfico da superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(1, 2, f(1, 2))$ da função $f(x, y) = x^2 \ln(y^2 - 3) + xy e^{2x-2}$.
- b) [1,5 pt] Calcule a derivada direcional da função $g(x, y) = \sqrt{2x^2 + 3y^2}$ no ponto $(1, 2)$, na direção do vetor unitário associado a $\vec{v} = (4, -3)$.
- 3) a) [1,5 pt] Determine e classifique todos os pontos críticos da função $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ em máximos locais, mínimos locais ou pontos de sela, utilizando o teste da matriz Hessiana.
- b) [1,5 pt] Utilize o método dos Multiplicadores de Lagrange para encontrar os pontos de máximo e mínimo absolutos da função $g(x, y) = 2x + 3y$ sujeita à restrição $x^2 + 2y^2 = 34$.
- 4) Seja $z = f(x, y)$ uma função e suponha que as variáveis x e y dependam de u e θ através das funções de transição para coordenadas polares: $x = u \cos(\theta)$, $y = u \sin(\theta)$, com $u > 0$.
- a) [1 pt] Utilizando a Regra da Cadeia para funções de várias variáveis, determine as derivadas parciais de primeira ordem $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ em termos de $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.
- b) [0,5 pt Extra] Calcule as derivadas de segunda ordem necessárias e mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Questão 5) [2,0 pontos] Em um grafo r -partido, os vértices são divididos em r grupos disjuntos, sem arestas ligando vértices de um mesmo grupo. Quando o grafo é completo, cada vértice de um grupo se conecta a todos os vértices dos outros grupos. Se os tamanhos das partições são $x_1, \dots, x_r$, o número de arestas é dado por $f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{i < j} x_i x_j$. Trate os tamanhos das partições como variáveis contínuas não negativas.

- a) [0,5 pt] No caso bipartido, com partições de tamanhos x e y , temos $f(x, y) = xy$. Use Multiplicadores de Lagrange para maximizar f sujeito à restrição $x + y = V$.
- b) [0,5 pt] No caso tripartido, com partições de tamanhos x, y, z , temos $f(x, y, z) = xy + xz + yz$. Use Multiplicadores de Lagrange com a restrição $x + y + z = V$ e conclua que o máximo ocorre quando $x = y = z = V/3$.
- c) [1,0 pt] Para um grafo r -partido com $V = rn$ vértices, use Multiplicadores de Lagrange para obter qual é o número máximo de arestas em função de r e n .

Bônus Extra [0,5 ponto] Um grafo é livre de triângulos quando não existem três vértices mutuamente conectados. Seja $G = (\mathcal{V}, E)$ um grafo livre de triângulos. Mostre que o número de arestas satisfaz

$$|E| \leq \frac{|\mathcal{V}|^2}{4}.$$