

	Universidade Federal do Rio de Janeiro	
	Disciplina: Cálculo 2	
	Professor: Lucas Aragão	
	Semestre: 2026.01	
	Discente:	Matrícula:
	Curso:	

Prova 2 - Equações Diferenciais Ordinárias

Questão 1 [2 pontos] Resolva o problema de valor inicial:

$$y' = x^2(y + 2), \quad y(0) = 1.$$

Questão 2 [2 pontos] Encontre todas as funções $f(x)$ que satisfazem a equação:

$$f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = x^3, \quad x > 0.$$

Questão 3 [2 pontos] Resolva a EDO

$$(ye^x + 2x \cos y + 2x) dx + (e^x - x^2 \sin y + 2y) dy = 0.$$

Questão 4 [2 pontos] Resolva a equação diferencial:

$$y'' - 5y' + 6y = e^x.$$

Questão 5 [2 pontos] Nessa questão, vamos resolver equações da forma $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$.

- Considere a equação diferencial $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$. Determine os valores de m para os quais $y(x) = x^m$ é solução da equação diferencial. Em seguida, escreva a solução geral.
- Considere agora a equação diferencial $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$. Procure novamente soluções da forma $y = x^m$ e mostre que a equação obtida para m possui uma raiz repetida. A partir da solução encontrada $y_1 = x^m$, procure uma segunda solução da forma $y_2 = c(x)x^m$. Use essa substituição para determinar a segunda solução e escreva a solução geral da equação diferencial.
- Por fim, considere a equação diferencial $x^2y'' - xy' + 5y = 0$. Procure soluções da forma $y = x^m$ e mostre que a equação obtida para m possui raízes complexas.

[Bônus:] A partir dessas raízes, escreva a forma da solução geral real da equação diferencial.

Questão Bônus [2 pontos] Um coelho parte da origem e corre sobre o eixo y com velocidade constante igual a 1. No mesmo instante, um cão parte do ponto $(9, 0)$ e corre com velocidade constante 2, sempre apontando diretamente para a posição atual do coelho. Suponha que a trajetória do cão seja o gráfico de uma função $y = f(x)$.

- Quando o cão está em (x, y) e o coelho em $(0, Y)$, mostre que $Y = y - xy'$.

Dica: A reta tangente a trajetória do cão passa pela posição instantânea do coelho.

- Usando que o cão percorre o dobro da distância percorrida pelo coelho, mostre que $xy'' = \frac{1}{2}\sqrt{1 + (y')^2}$.

Dica: Use a fórmula do comprimento de arco $ds/dx = -\sqrt{1 + (y')^2}$. Note que $s(x) = 2Y(x)$, derive os dois lados em relação a x e use a expressão obtida no item 1.

- Resolva a EDO $xy'' = \frac{1}{2}\sqrt{1 + (y')^2}$ com $y(9) = 0$ e $y'(9) = 0$.

Dica: Faça $z = y'$. $\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \ln(z + \sqrt{1 + z^2})$. A solução esperada é $y = 6 - 3\sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{9}$, para $0 < x \leq 9$.

- Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x)$ e conclua que o cão alcança o coelho no ponto $(0, 6)$.